

수학

성명: ()

제1차 시험	2 교시 전공 A	12문항 40점	시험 시간 90분
--------	-----------	----------	-----------

- [2점]

3. 복소함수

$$f(z) = \frac{(z-i+1)^5(z+1+i)^4}{z^6(z-1+4i)^3(z-9+2i)^5} e^z$$

과 복소평면에 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r 인 원을 시계반대 방향으로 한 바퀴 도는 곡선 $C(r)$ 이 있다.

선적분 $\int_{C(2)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ 의 값을 구하시오.

또한 $\int_{C(r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$ 을 만족시키는 양의 정수 r 의 개수를 구하시오. [2점]

4. 3차원 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 단위속력곡선(unit speed curve) $\alpha: (0,2) \rightarrow \mathbb{R}^3$ 이 모든 $s \in (0,2)$ 에 대하여

$$\alpha(s) \cdot \alpha'(s) = 0, \quad \alpha(s) \cdot N(s) = -2s^2$$

을 만족시킨다. $\alpha(1) \cdot B(1) = 12$ 일 때, 곡선 $\alpha(s)$ 의 $s=1$ 에서의 곡률(curvature) $\kappa(1)$ 과 비틀림률(열률, 꼬임률, torsion)의 절댓값 $|\tau(1)|$ 을 순서대로 구하시오. (단, $N(s)$ 는 점 $\alpha(s)$ 에서의 법선벡터(normal vector)이고, $B(s)$ 는 점 $\alpha(s)$ 에서의 중법선벡터(binormal vector)이다.) [2점]

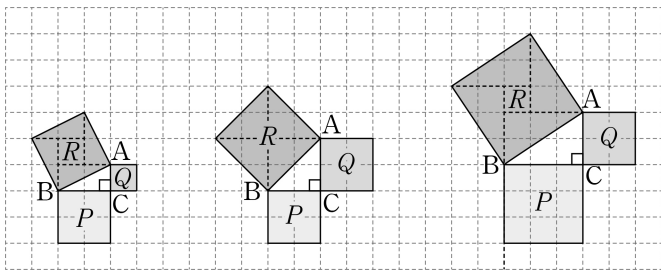
5. 다음은 두 예비 교사가 중학교 ‘피타고라스 정리’에 대한 수업을 계획 하면서 나눈 대화의 일부이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점]

예비 교사 A: 내가 맡은 [1단계] 수업 활동을 다음과 같이 계획해 봤어.

1단계

다음 탐구활동에 학생들이 주도적으로 참여하게 한다.

- ① 그림과 같이 한 칸의 크기가 1인 모눈종이에 세 종류의 직각 삼각형 ABC에 대하여 세 변을 각각 한 변으로 하는 정사각형 P, Q, R을 그린다.

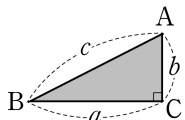
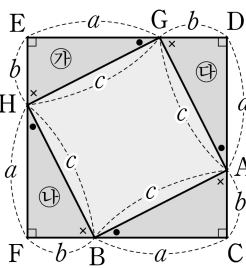


- ② 정사각형 P, Q, R의 넓이를 구하여, 넓이 사이의 관계 (P의 넓이)+(Q의 넓이)=(R의 넓이)를 발견한다.
- ③ 직각삼각형의 세 변의 길이 사이에는 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 이 성립할 것이라고 추측한다.

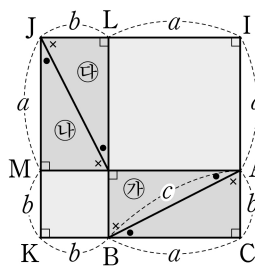
예비 교사 B: [1단계] 수업 활동에 이어서 [2단계]는 다음과 같이 준비해 봤어.

2단계

- ④ 학생들은 탐구활동을 통해 앞서 관찰한 세 종류의 직각삼각형의 세 변의 길이 사이에 $\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2$ 이 성립함을 인식한다.
- ⑤ 교사는 “모든 직각삼각형에서 이 성질이 항상 성립할까?”라고 발문한다. 학생들은 $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ 라 할 때, $a^2 + b^2 = c^2$ 이 성립하는지에 대해 생각해 보면서 자유롭게 논의한다.
- ⑥ 학생들은 다음 과정을 통해 모든 직각삼각형에서 $a^2 + b^2 = c^2$ 이 항상 성립함을 정당화하여 추측을 피타고라스 정리로 재구성한다.



[그림 1]



[그림 2]

• [그림 1]과 [그림 2]를 비교하여 $a^2 + b^2 = c^2$ 임을 이끌어 낸다.

<작성 방법>

- [1단계]에 해당하는 개연 추론 유형을 쓰고, [2단계]의 과정 없이 [1단계]만을 수업할 때, 이 수업을 개연 추론 지도의 관점에서 평가할 것.
- [1단계]와 [2단계]를 순서대로 수업할 때, [2단계]에서 학생들이 경험할 수 있는 피아제(J. Piaget)의 반영적 추상화의 과정을 활동 내용에 근거하여 ‘반사’와 ‘반성’으로 설명할 것.

6. 다음은 ‘수학교재연구 및 지도법’ 강의에서 지도 교수와 예비 교사가 나눈 대화이다. <작성 방법>에 따라 서술하시오. [4점]

지도 교수: 오늘은 고등학교 <확률과 통계> 과목의 ‘수학적 확률’에 대한 지도 방안에 대해서 논의해 봅시다.

예비 교사 1: 제가 조사한 자료에서는 시행의 뜻과 표본공간, 사건, 근원사건의 정의를 먼저 제시하고, 수학적 확률을 다음과 같이 정의하고 있습니다.

어떤 시행에서 원소가 유한개인 표본공간 S 에 대하여 (㉠), 사건 A 가 일어날 확률 $P(A)$ 를 $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ 로 정의하고, 이를 사건 A 가 일어날 수학적 확률이라고 한다. (단, 표본공간은 공집합이 아니다.)

예비 교사 2: 그런데 수학적 확률에 (㉠)와/과 같은 가정이 포함된 이유를 잘 모르겠습니다.

지도 교수: 고등학교 교육과정에서 다루는 수학적 확률이 라플라스(P. S. Laplace)의 고전적인 확률 정의를 따르기 때문입니다. 수학적 확률은 시행 전에 확률 값의 계산을 허용하고 있다는 점에서 확률에 대한 일종의 선험적 접근이라고 볼 수 있습니다.

예비 교사 3: 동일한 시행을 충분히 많은 횟수로 반복 시행하여 그 사건이 발생하는 상대도수로 구할 수 있는 확률인 (㉡)을/를 접목한다면, 근원사건의 확률을 구하여 표본공간의 적절성을 검토할 수 있지 않을까요?

예비 교사 1: 하지만 (㉡)도 상대도수의 극한이 존재한다는 것은 직관적으로 이해할 수는 있지만 현실적으로 무한 번의 시행을 할 수는 없기 때문에 학생들이 의문을 가질 것 같아요.

예비 교사 2: 저는 확률의 역사 중 학생들이 호기심을 갖게 할 만한 소재인 심프슨(Simpson)의 패러독스를 간단한 문제 상황으로 구현하여 [읽기 자료]를 만들어 보았습니다. ㉢ A학과와 B학과 각각에서의 남학생과 여학생의 합격률, 대학 전체에서의 남학생과 여학생의 합격률을 비교해 보면, ㉣ 확률 문제 상황에서 추론할 때 주의해야 할 점에 대해 알게 됩니다. 이때, 각 성별 합격률은 각 성별 지원자 수에 대한 합격자 수의 비율입니다.

[읽기 자료]

다음은 어느 대학에서 A, B 두 학과의 입학시험 결과를 조사한 표이다. (단, 이 대학에는 두 학과만 있다고 하자.)

	남학생		여학생	
	합격자 수	지원자 수	합격자 수	지원자 수
A학과	30	80	7	20
B학과	10	20	38	80
대학 전체	40	100	45	100

<작성 방법>

- 괄호 안의 ㉠에 들어갈 내용을 작성하고, 괄호 안의 ㉡에 들어갈 용어를 쓸 것.
- [읽기 자료]에서 밑줄 친 ㉢을 비교한 결과를 쓰고, 그 결과를 근거로 심프슨(Simpson)의 패러독스를 통해 알 수 있는 밑줄 친 ㉣을 작성할 것.

7. 수열 $\{a_n\}$ 이 점화식

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2, \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} \quad (n \geq 2)$$

를 만족시킨다. 이 점화식의 특성다항식(고유다항식, characteristic polynomial)과 수열 $\{a_n\}$ 의 일반항을 순서대로 구하시오.

또한 수열 $\{a_n\}$ 의 생성함수(generating function)를 $f(x)$ 라 할 때,

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = x \left(f\left(\frac{x}{2}\right) \right)^3$$

을 만족시키는 수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

8. 함수 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 을 $f(x, y) = x^4 + y^4 - xy^2$ 이라 하자. $t \neq 0$ 인 상수 t 에 대하여 직선 $y = tx$ 와 등위곡선(level curve) $f(x, y) = 0$ 의 원점 이외의 교점을 구하시오.

또한 영역 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \leq 0, y \geq 0\}$ 의 넓이를 풀이 과정과 함께 쓰시오. [4점]

※ 다음은 필요하면 사용할 수 있다.

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$$

9. 모든 성분이 실수인 3×3 행렬 A 가

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -20 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \det(A) = 800$$

을 만족시킬 때, A 의 모든 고윳값(eigenvalue)을 구하시오.

또한 가역 대칭행렬(symmetric matrix) B 가

$$AB = 2\det(B)I, \quad \text{tr}(B) < 0$$

을 만족시킬 때, B 의 모든 고윳값과, B 의 고유벡터(eigenvector)로 구성된 $\mathbb{R}^3$ 의 정규 직교 기저(orthonormal basis)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. (단, $\det(M)$ 은 행렬 M 의 행렬식(determinant), $\text{tr}(M)$ 은 M 의 대각합(trace)이고, I 는 3×3 단위행렬이다.) [4점]

10. 자연수 n 에 대하여 함수 $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 을

$$f_n(x) = \frac{x^4 + \sqrt{n}x^3}{n(x^2 + 2\sqrt{n}x + 2n)}$$

으로 정의하자. 모든 양의 실수 L 에 대하여 함수항 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 가 닫힌구간 $[-L, L]$ 에서 고른수렴(평등수렴, 균등수렴, uniform convergence)하는지 판별하고 그 이유를 쓰시오. 또한 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 가 $\mathbb{R}$ 에서 연속인지 판별하고 그 이유를 쓰시오. [4점]

11. 덧셈군 $\mathbb{Z}_{20}$, $\mathbb{Z}_{26}$, $\mathbb{Z}_{200}$ 에 대하여 군 준동형사상(group homomorphism) $\phi : \mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26} \rightarrow \mathbb{Z}_{200}$ 의 상(치역, image) $\text{Im}(\phi)$ 가 6개의 부분군을 가질 때, $\text{Im}(\phi)$ 의 위수(order)를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 ϕ 의 핵(kernel) $\text{Ker}(\phi)$ 의 위수를 구하시오. (단, $\mathbb{Z}_{20} \times \mathbb{Z}_{26}$ 은 $\mathbb{Z}_{20}$ 과 $\mathbb{Z}_{26}$ 의 직접곱(직적, direct product)이다.) [4점]

12. 집합 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x < 1\}$ 위에서 거리함수 d 를 $d((x, y), (x', y')) = \min\{\sqrt{(x - (x' + k))^2 + (y - y')^2} \mid k = -2, 0, 2\}$ 라 하자. 집합 $\{(x, 0) \in A \mid d((-1, 0), (x, 0)) \leq \frac{1}{2}\}$ 에 속하는 점의 x 좌표 중 가장 작은 양의 실수를 풀이 과정과 함께 쓰시오. 또한 $\mathbb{R}_*^2 = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ 에 대하여 함수 $f : A \rightarrow \mathbb{R}_*^2$ 을 $f(x, y) = e^y(\cos \pi x, \sin \pi x)$ 라 하고, $\mathbb{R}_*^2$ 위에서 거리함수 d_* 을 $d_*((u, v), (u', v')) = d(f^{-1}(u, v), f^{-1}(u', v'))$ 이라 하자. 거리공간 $(\mathbb{R}_*^2, d_*)$ 의 수열(sequence) $\left\{\left(0, \frac{1}{n}\right)\right\}$ 이 코시수열(Cauchy sequence)이 아님을 보이시오. [4점]

<수고하셨습니다.>